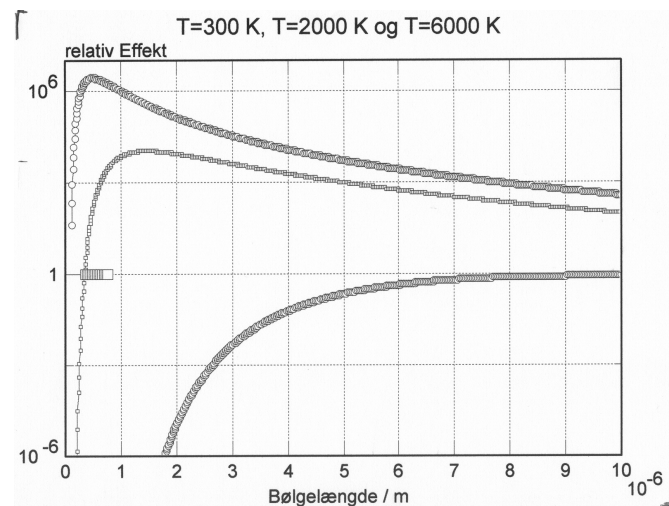


Plancks Virkningskvantum

Jacob Nielsen¹

Heinrich Hertz (1857-1894) viste med eksperimenter, der blev udført i årene 1883-1889, at lys er elektromagnetisk stråling. Stråling udsendt af svingende elektriske felter udviste samme interferensegenskaber som lys. Eftersom varme legemer som for eksempel en glødetråd i en pære udsender lys, var det fra dette tidspunkt klart at varmestråling er elektromagnetisk stråling. Planck var meget optaget af termodynamik - specielt 2. hovedsætning. I oktober 1900 arbejdede han med varmestråling. Plancks mål var at finde en formel for varmestrålingens bølglængdefordeling og at udlede denne formel fra grundlæggende principper. I 1887 havde Hertz publiceret en artikel om elektromagnetisk dipolstråling. Planck arbejdede derfor med ideen om at varmestrålingen udsendes af elektriske ladninger i stoffers overflade svinger som harmoniske oscillatorer. Maxwell havde tidligere vist, at accelererede ladninger udsender elektromagnetisk stråling. Hvis varmestråling skal beskrives termodynamisk, må strålingen tilordnes en entropi. Det var løsningen af dette problem, der førte til kvantefysikkens fremkomst.



Sortlegemestråling svarende til tre forskellige temperaturer. Desuden er det synlige bølglængde-område markeret. Bemærk, at skalaen på andenaksen er logaritmisk.

Nogle dage før et møde i "Deutsche Physikalische Gesellschaft" 19/10 1900 hørte Planck om nogle målinger på sortlegemestrålingens bølglængdefordeling, udført af Rubens og Kurlbaum. På mødet fremlagde Planck som den første en model, der giver den rigtige energifordeling både for korte- og lange bølglængder. I et hulrum på en kubikmeter, hvor temperaturen er T , repræsenterer strålingen med bølglængde mellem λ og $\lambda+d\lambda$ energien:

$$\varepsilon(\lambda, T) = \frac{8\pi \cdot h \cdot c}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{e^{\left(\frac{h \cdot c}{k \cdot \lambda \cdot T}\right)} - 1}$$

Rubens kunne næste morgen bekræfte, at formlen var i perfekt overensstemmelse med de eksperimentelle data.

¹E\Fysik\QM's udvikling\Plancks Virkningskvantum 01.wpd

I et hulrum er strålingsenergien i ligevægt med udstrålingen fra rummets overflade. Udstrålingen fra et sort² legeme må derfor have samme bølgelængdefordeling som hulrumstrålingen. Planck demonstrerede med det samme nogle overbevisende egenskaber ved fordelingen. Hvis man beregner den samlede udstråling fra et sort legeme ved at integrere udstrålingen op over alle bølgelængder³, ser man for det første, at den udstrålede effekt bliver endelig (integralet eksisterer). Hermed er problemet med den såkaldte "ultraviolette katastrofe" løst. Problemet med de tidligere forslag til en strålingslov var, at den udstrålede energi blev uendelig, hvis man tillod stråling med vilkårligt små bølgelængder, og hvis ligefordelingsloven⁴ skulle gælde.

For det andet var resultatet i overensstemmelse med **Stefan-Boltzmanns lov**, som Stefan fandt i 1879 og Boltzmann i 1884. Den udstrålede effekt fra en sort flade er:

$$P = A \cdot \sigma \cdot T^4$$

Hvor A er fladens areal og σ er Stefan-Boltzmanns konstant. Varmestrålingen vokser altså kraftigt med temperaturen - pr. kvadratmeter er effekten cirka 500 W fra en 300 K varm hudoverflade, 3.5 kW fra en 500 K varm brændeovn og i størrelsesordenen 10 MW fra solens overflade! I øvrigt bruges varmemestrålingen i dag til berøringfri temperaturmåling for eksempel, når temperaturen i kølediske skal kontrolleres.

Endelig var Planckfordelingen i overensstemmelse med **Wiens forskydningslov**, ved hjælp af hvilken man kan beregne den bølgelængde, hvor der udstråles mest energi:

$$\lambda_{\max} \cdot T = 2.8978 \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{K}$$

loven udtrykker, at bølgelængden halveres, hvis den absolutte temperatur fordobles. En konsekvens af loven er at legemer ved opvarmning først er rødglødende og siden hvidglødende. Ved lave temperaturer udsendes ikke blåt lys⁵.

Plancks strålingslov blev udsat for hård kritik. Formlen blev opfattet som en ad hoc løsning, hvilket også var delvis korrekt. Men Planck var selv meget opsat på at udlede loven ud fra mere generelle principper. I 1901 publicerer han en artikel, hvor strålingsloven udledes ud fra en entropifunktion. Sortlegemestrålingens entropi beregnes ved at kvantisere oscillatorernes energi⁶. Denne kvantisering blev også opfattet som noget "hokus pokus". En fysisk teori betragtes først som god, når den har vist sin gyldighed for et bredt udvalg af problemer. Kvantehypotesen var indtil videre ikke anvendt i andre sammenhænge. Men flere fysikere skrev sig ideen bag øret. En af dem var den unge og på dette tidspunkt forholdsvis ukendte Albert Einstein.

² Et sort legeme defineres faktisk oftest ved, at det opfylder plancks strålingslov. Mange overflader opfører sig med god tilnærmelse som sorte legemer, og et hulrum med et lille kikhul kommer meget tæt på. Vores univers er i øvrigt, med mindre lokale afvigelser som for eksempel stjerner og planeter, et sort legeme med en temperatur på 2.7 K. Strålingen stammer fra Big Bang.

³ Se eventuelt matematisk appendiks 1: "Fra Plancks strålingslov til Stefan-Boltzmanns lov".

⁴ Se eventuelt eksempel 2: "Varmekapacitet og Kinetisk Molekyleteori"

⁵ Se eventuelt eksemplet "Planckfordeling og Kernesyntese".
De matematiske detaljer ved udledning af Wiens lov ud fra planckfordelingen findes i appendix 2.

⁶

Planck har udtalt, at han fik ideen ved at tænke på Boltzmann. Hvis man skal beregne entropien ud fra Boltzmanns formel, må man være i stand til at tælle svingningstilstandene. Det kan man ikke hvis de udgør et kontinuum - energien må kvantiseres.

Varmestråling og entropi

Planck forestillede sig, at n svingende ladninger med egenfrekvens f fordelte p energikvanta af størrelsen hf mellem sig; på samme måde som man kan fordele p kugler i n æsker. p kan være større end n , så hver ladning har en energi på et helt tal gange hf . Dette svarer i et klassisk billede til, at ladningerne kan svinge med forskellige amplituder. Regner man med, at enhver af de n placeringer er lige sandsynlige, kan vi med standard kombinatorik⁷ beregne, at antallet af konfigurationer bliver:

$$\Omega = \frac{(n+p-1)!}{(n-1)! \cdot p!}$$

for eksempel kan tre kugler fordeles i to rum på $4!/(1! \cdot 3!) = 4$ måder, som jo er $\{(3;0), (0;3), (2;1), (1;2)\}$. Hermed har Planck fået talt konfigurationerne, så han kunne lave en entropifunktion ved hjælp af Boltzmanns formel. Ud fra entropifunktionen kan systemets termodynamik undersøges; for eksempel er den absolutte temperatur defineret som:

$$\frac{1}{T} \equiv \frac{dS}{dE_{\text{indre}}}$$

Denne formel er en generalisering af den klassiske definition på entropi. Bemærk, at S her betegner entropien og ikke for eksempel virkningsintegralet.

Planck havde nu nået sit mål - han havde fundet sortlegemestrålingens energifordeling ud fra det mest grundlæggende termodynamiske begreb - entropi. I artiklen fra 1901 beregner Planck også værdien af konstanten h til $6.55 \cdot 10^{-34}$ Js ud fra de tilgængelige eksperimentelle data.

⁷ I de fleste standardfremstillinger af kombinatorik, udledes formelen for antallet af uordnede delmængder på r elementer udtaget fra en mængde med n elementer:

$$C(n, r) = \frac{n!}{r! \cdot (n-r)!}$$

Hvis vi har en mængde på $(n+p-1)$ elementer hvorfra vi vælger $(n-1)$ får vi antallet Ω . Det skyldes, at fordelingen af de p kvanta på n oscillatorer er ækvivalent med at placere $p-1$ skillerum i en række med $n + (p-1)$ positioner. Hvis de første skillerum f.eks. er placeret i positionerne (3,8,9,12), er antallet af energikvanta, som tildeles de første oscillatorer: (2,4,0,2). $(n-1)$ positioner kommer til at repræsentere skillerum, og n positioner repræsenterer et energikvantum.

Plancks oscillatorer

For en masse m , der påvirkes af en tilbageførende kraft, der opfylder Hooks lov med fjederkonstant k , er energien givet ved:

$$E_{pot} = \frac{1}{2}kx^2$$

$$E_{kin} = \frac{p^2}{2m}$$

$$E_{mek} = konst. = E$$

$$E = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{p^2}{2m} \Rightarrow p = \sqrt{2mE - mkx^2}$$

$$S = 2 \int_{-x_{max}}^{x_{max}} p \cdot dx = 2 \int_{-x_{max}}^{x_{max}} \sqrt{2mE - mkx^2} \cdot dx$$

I sidste linje udregnes virkningsintegralet for en svingning som to gange integralet fra yderposition til yderposition. I appendiks 3 er integralet udregnet. Benytter vi at frekvensen af en harmonisk oscillator er givet ved:

$$f = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Bliver resultatet af integrationen:

$$S = \frac{E}{f}$$

Planck kvantiserede nu S i kvanta af størrelsen h , og resultatet blev:

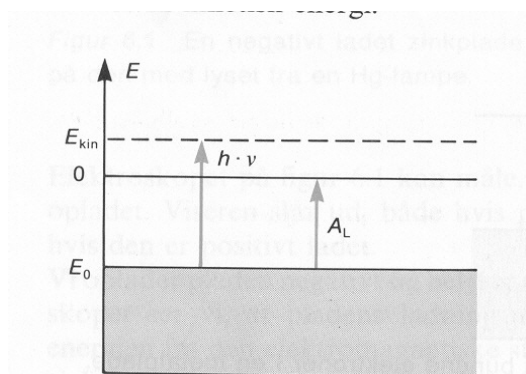
$$S = n \cdot h, n \in \mathbb{N} \Rightarrow n \cdot h = \frac{E}{f} \Rightarrow E = n \cdot h \cdot f$$

Sidste ligning er den vi i dag fortolker som at energien af elektromagnetisk stråling er kvantiseret i kvanta af størrelsen hf .

Fotoelektrisk effekt.

I slutningen af det 19. århundrede arbejdede mange fysikere med katodestråling. Hvis man f.eks. lægger en glødetråd på et lavt negativt potentiale, så tråden udgør en katode, observerer man under visse omstændigheder, at tråden udsender stråling. Strålingen blev efterhånden identificeret med elektroner.

Undersøgelserne førte også til opdagelsen af den fotoelektriske effekt - det fænomen, at udsendelsen af katodestråling kan stimuleres ved belysning af katoden. Det viste sig også hurtigt, at den fotoelektriske effekt afhænger af lysets bølgelængde. Mere præcist: At fotoelektrisk effekt fra et bestemt metal ophører, når bølgelængden overskrider en grænseværdi λ_{\max} . Det skyldes, at der skal tilføres et løsrivelsesarbejde A_L for at rive en elektron ud af metallet.



E_0 er toppen af ledningsbåndet i metallet. I faste stoffer har vi ikke skarpe energiniveauer men bånd af niveauer. Elektronerne i det øverste bånd er ikke lokaliserede - såkaldte ledningselektroner, der kan bevæge sig rundt i metallet. De lavereliggende bånd indeholder lokaliserede elektroner, der er bundet til en kerne. Ledningselektronernes energiniveauer er negative, fordi elektronerne er bundet til metalkrystallen, selv om de ikke er bundet til den enkelte metalkerne.

Når en foton rammer en metaloverflade går en del af fotonens energi til løsrivelsesarbejdet A_L , og resten går til den løsrevne elektrons kinetiske energi.

$$E_{kin} = h \cdot f - A_L$$

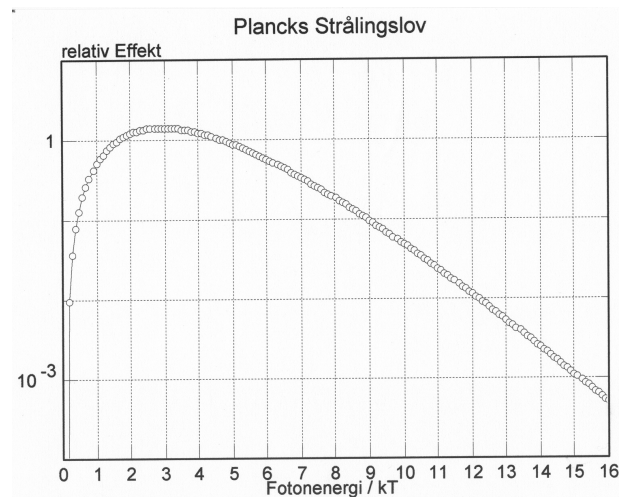
Einstein betragter altså her lyset som energikvanta. Lewis gav i 1926 disse energikvanta navnet fotoner. Einstein publicerede dette resultat i 1905, og modtog Nobelprisen for arbejdet i 1922. I 1905 offentliggjorde Einstein også to andre artikler af "nobelformat"; nemlig artiklen om "Den Specielle Relativitetsteori" og en artikel om "Brownske bevægelser". I en artikel fra 1907, viser Einstein, at Plancks kvantisering af energien kan løse problemet med at varmekapaciteten "forsvinder" ved lave temperaturer. Her anvendes kvanteideen indenfor et område, der ikke har med stråling at gøre - ideen om kvantisering har opnået status som "en god teori".

Diskussionen om Virkningskvantet

I 1913 anvender Bohr Plancks idé i sin teori for brintatomet. Det vil vi komme nærmere ind på senere. Her skal først nævnes nogle andre aspekter af debatten om kvantisering:

- J.J.Thomson observerer i 1903, at energien i røntgenstråling ikke absorberes jævnt.
- Hertz havde i 1887 observeret, at gnistgabet blev større ved belysning med UV-lys; udsendelsen af gnister stimuleres altså af lys. Afladning af Zn-plader med lys af forskellig bølgelængde blev undersøgt af Hallwacks i 1888.
- Hughes efterviser i 1912 Einsteins fotoelektriske ligning: $E_{\text{kin}} = hf - A$, og Millikan gør det i 1914 så præcist, at h kan bestemmes grafisk.
- Lorentz og andre har indvendingen mod fotonmodellen.
Interferensforsøg af Lummer og Gehrcke viste, at grønt kviksølvlys med en faseforskel på omkring to millioner bølgelængder kunne interferere. Så fotonens længde må være i størrelsesorden meter. Øjet lukker altså tilsyneladende kun en brøkdel af en foton ind, mens reaktionen på nethinden foregår fotonvis!
- Poincare viser i 1911, at kvantisering er en nødvendig konsekvens af en strålingslov med endelig udstråling.
- Sommerfeld foreslår på Solvay kongressen i 1911, ideen om virkningens kvantisering ophøjet til et princip.

Eksempel: Planckfordeling og Kernesyntese



Strålingsintensiteten er stadig 10% af den maximale ved en fotonenergi på 9 kT.

Kort tid efter Big Bang var temperaturen så høj, at kerner ikke kunne hænge sammen. De blev straks splittet ad af en foton, hvis energi oversteg bindingsenergien. Som det fremgår af figuren vil et betragteligt antal fotoner have energier over 10 kT. I det følgende regner vi med, at kerner kan hænge sammen, når:

$$E_{\text{bind}} > 10 \text{ kT}$$

Kernernes overlevelse afhænger også af tætheden af stof og stråling, så dette kan aldrig blive mere end en "tommelfingerregel". Som det fremgår af tabellen nedenfor, har deuterium H-2 en relativt lille bindingsenergi. Da deuterium skal dannes, før kernesyntesen kan komme videre, udgør stoffet en flaskehals. Dette er grunden til, at der ved Big Bang stort set kun nåede, at blive dannet brint og helium, før universet blev for koldt og tætheden for lille.

Kerne	Bindingsenergi - E_b MeV	T-syntese = $E_b/10 \cdot k$ K
H-2	2,224574	2,58E+09
H-3	8,48286	9,84E+09
He-3	7,71811	8,96E+09
He-4	28,29588	3,28E+10
	Ioniseringsenergi for brint	
	1,36E-05	1,58E+04

Bemærk, at atomer først kan dannes ved meget lavere temperaturer.

Eksempel 2 *Varmekapacitet og Kinetisk Molekyleteori*

Ifølge den kinetiske molekyleteori fordeles den termiske energi ligeligt over systemets frihedsgrader med $\frac{1}{2}kT$ pr. frihedsgrad. Med en frihedsgrad menes her en variabel fysisk størrelse, der indgår i udtrykket for molekylerens energi. I en enatomig idealgas afhænger den indre energi kun af hastighedsvektorens tre komponenter:

$$E = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 \Rightarrow \langle E \rangle = \frac{3}{2} k \cdot T$$

En harmonisk oscillator har både potentiel og kinetisk energi:

$$E = \frac{1}{2} k \cdot x^2 + \frac{p^2}{2m}$$

positionen og impulsen er tredimensionale størrelser, så systemet har seks frihedsgrader. Varmekapaciteten af faste stoffer kan beskrives, ved at betragte kernerne som harmoniske oscillatorer, der svinger omkring ligevægtspositionerne i gitteret.

Den velkendte og den mere generelle definitions ligning for varmekapacitet er:

$$\Delta E_i = C \cdot \Delta T \quad C \equiv \left(\frac{dE_i}{dT} \right)_v$$

vi finder altså varmekapaciteten ved differentiere funktionsforskriften for den indre energi ved konstant volumen. Varmekapaciteten for et fast stof betragtet som bestående af harmoniske oscillatorer bliver så:

$$C = \frac{dE}{dT} = \frac{d}{dT} (3N \cdot k \cdot T) = 3 \cdot N \cdot k = 3 \cdot n \cdot N_A \cdot k = 3 \cdot n \cdot R$$

hvor N er antallet af kerner, mens n er antallet af mol kerner.

Ser vi for eksempel på aluminium:

$$c = \frac{C}{m} = \frac{3n \cdot R}{n \cdot M} = \frac{3R}{M} = \frac{3 \cdot 8.31451 \text{ J/mol} \cdot \text{K}}{26.982 \cdot 10^{-3} \text{ kg/mol}} = 924.45 \text{ J/kg} \cdot \text{K}$$

hvor m er atommassen, mens M er stoffets molarmasse.

Denne værdi afviger kun 3% fra den eksperimentelle værdi ved stuetemperatur. Ser man imidlertid på diamant, der består af et kulstofgitter, bliver afvigelserne store. Det var omkring år 1900 også kendt, at varmekapaciteten er temperaturafhængig og ikke konstant, som den kinetiske molekyleteori forudsiger. Varmekapaciteten går mod nul, når vi nærmer os det absolutte nulpunkt. Dette fænomen forklarede Einstein i 1907 ved at kvantisere oscillatorernes energi.

Matematisk appendiks 1 *Fra Plancks strålingslov til Stefan-Boltzmanns lov*

Den samlede energi, der udstråles fra et sort legeme, beregnes ved at integrere over alle bølgelængder. Stefan-Boltzmanns lov fremkommer så efter en substitution:

$$E(T) = \int_{\lambda=0}^{\infty} \varepsilon(\lambda, T) d\lambda = 8\pi \cdot h \cdot c \cdot \int_{\lambda=0}^{\infty} \frac{\lambda^{-5}}{e^{\left(\frac{hc}{\lambda \cdot T}\right)} - 1} d\lambda \quad \wedge \quad z = \frac{hc}{\lambda \cdot T} \rightarrow d\lambda = -\lambda^2 \left(\frac{k \cdot T}{h \cdot c}\right) dz$$

$$\Downarrow$$

$$E(T) = -8\pi \cdot h \cdot c \cdot \left(\frac{k \cdot T}{h \cdot c}\right)^4 \int_{\infty}^{\lambda=0} \frac{z^3}{e^z - 1} d\lambda = konst \cdot T^4 \cdot \int_0^{\infty} \frac{z^3}{e^z - 1} dz = konst \cdot T^4$$

Integralet på venstre side af lighedstegnet afhænger ikke af temperaturen, og tallet kan slås op i en integraltabel eller beregnes numerisk. Så den samlede udstrålede energi er proportional med temperaturen i fjerde potens, som Stefan-Boltzmanns lov påstår.

Matematisk appendiks 2 *Udledning af Wiens lov ud fra Planckfordelingen*

Bølgelængden svarende til maximal udstråling kan findes ved, at differentiere Plancks strålingslov med hensyn til bølgelængden, og sætte differentialkvotienten lig med nul.

$$\varepsilon(\lambda, T) = 8\pi hc \frac{\lambda^{-5}}{e^{\left(\frac{hc}{\lambda \cdot T}\right)} - 1} \quad \wedge \quad z = \frac{hc}{\lambda kT}$$

$$\Downarrow$$

$$\varepsilon(z, T) = \frac{8\pi \cdot k^5 T^5}{(hc)^4} \cdot \frac{z^5}{e^z - 1} = konst \cdot \frac{z^5}{e^z - 1} \quad \text{for } T \text{ konstant}$$

For en given temperatur får Planckfordelingen altså et forholdsvis simpelt udseende, hvis vi benytter den nye variabel z . Vi finder nu et ekstremum for energifordelingen ved at differentiere og sætte differentialkvotienten lig med nul.

$$\frac{d\varepsilon}{dz} = 0 \Rightarrow \frac{5z^4(e^z - 1) - z^5 \cdot e^z}{(e^z - 1)^2} = 0 \Rightarrow 5(e^z - 1) - z \cdot e^z = 0$$

Løsningen er $z = 4.9650 \cdot 10^{-3}$, hvilket kan kontrolleres ved at sætte værdien ind i ligningen. Nu findes værdien af λ svarende til denne værdi af z .

$$z = \frac{hc}{\lambda kT} = 4.965078 \cdot 10^{-3}$$

\Downarrow

$$\lambda_{\max} \cdot T = 2.8978 \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{K}$$

hvilket er Wiens forskydningslov. Det overlades til læseren, at overbevise sig om, at det fundne ekstremum virkelig giver bølgelængden, hvor udstrålingen har maximum (og ikke minimum eller vendetangent).

Appendix 3 Virkningsintegralet for harmoniske oscillatorer

$$S = 2 \int_{-x_{\max}}^{x_{\max}} p \cdot dx = 2 \int_{-x_{\max}}^{x_{\max}} \sqrt{2mE - mkx^2} \cdot dx$$

vi foretager nu en substitution, der forenkler integralet væsentligt ved brug af grundrelationen.

$$x = \sqrt{\frac{2E}{k}} \cos t$$

$$\frac{dx}{dt} = -\sqrt{\frac{2E}{k}} \sin t \Rightarrow dx = -\sqrt{\frac{2E}{k}} \sin t \cdot dt$$

grænserne findes ved at impulsen er nul i yderstillingerne

$$p=0 \Rightarrow E = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kx_{\max}^2 = \frac{1}{2}kx_{\max}^2 \Rightarrow x_{\max} = \sqrt{\frac{2E}{k}} \Rightarrow t_{\max} = 0 \wedge t_{\min} = \pi$$

indsætter vi nu x,dx og de nye grænser i virkningsintegralet, får vi ved benyttelse af grundrelationen:

$$S = 4E \sqrt{\frac{m}{k}} \cdot \int_0^{\pi} \sin^2 t \cdot dt = {}_2 \frac{2E}{\omega} \cdot \int_0^{2\pi} \sin^2 t \cdot dt = {}_3 \frac{E}{\omega} \cdot \int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t) \cdot dt$$

⇓

$$S = \frac{E}{\omega} \cdot \int_0^{2\pi} 1 \cdot dt = \frac{2\pi E}{\omega} = \frac{E}{f}$$

ved lighedstegnet mærket med 2, benyttes at $\sin^2 t$ har perioden π . Ved tredje lighedstegn benyttes, at $\sin^2 t$ og $\cos^2 t$ har grafer, der fremkommer af hinanden ved forskydning langs t-aksen.